

---

# 数学归纳法的七种变式及其应用

**摘要：**数学归纳法是解决与自然有关命题的一种行之有效的方法，又是数学证明的又一种常用形式. 数学归纳法不仅能够证明自然数命题，在实数中也广泛应用，还能对一些数学定理进行证明. 在中学时学习了第一数学归纳法和第二数学归纳法，因而对一些命题进行了简单证明. 在原有的基础上，给出了数学归纳法的另外五种变式，其中涉及到反向归纳法、二重归纳法、螺旋式归纳法、跳跃归纳法和关于实数的连续归纳法，并简单的举例说明了每种变式在数学各分支的应用. 这就突破了数学归纳法仅在自然数中的应用，为今后的数学命题证明提供了一种行之有效的证明方法——数学归纳法.

**关键词：**数学归纳法；七种变式；应用

## 1 引言

归纳法是由特殊事例得出一般结论的归纳推理方法，一般性结论的正确性依赖于各个个别论断的正确性。数学归纳法的本质<sup>[4]</sup>是证明一个命题对于所有的自然数都是成立的. 由于它在本质上是与数的概念联系在一起，所以数学归纳法可以运用到数学的各个分支，例如：证明等式、不等式，三角函数，数的整除，在几何中的应用等.

数学归纳法的基本思想是用于证明与自然数有关的命题的正确性的证明方法，如第一数学归纳法，操作步骤简单明了. 在第一数学归纳法的基础上，又衍生出了第二数学归纳法，反向归纳法，二重归纳法等证明方法. 从而可以解决更多的数学命题.

## 2 数学归纳法的变式及应用

### 2.1 第一数学归纳法

设  $p(n)$  是一个含有正整数  $n$  的命题, 如果满足:

- 1)  $p(1)$  成立 (即当  $n=1$  时命题成立);
- 2) 只要假设  $p(k)$  成立 (归纳假设), 由此就可证得  $p(k+1)$  也成立 ( $k$  是自然数), 就能保证对于任意的自然数  $n$ , 命题  $p(n)$  都成立.

通常所讨论的命题不都全是与全体自然数有关, 而是从某个自然数  $a$  开始的, 因此, 将第一类数学归纳法修改为:

设  $p(n)$  是一个含有正整数  $n$  的命题 ( $n \geq a, a \in \mathbb{N}^*$ ), 如果

- 1) 当  $n=a$  时,  $p(a)$  成立;

---

2) 由  $p(k)$  ( $k \geq a$ ) 成立必可推得  $p(k+1)$  成立, 那么  $p(n)$  对所有正整数  $n \geq a$  都成立.

例1 用数学归纳法证明

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

证明: (1) 当  $n=1$  时, 左边  $= 1 \cdot 2 = 2$ , 右边  $= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2$ , 因此等式成立.

(2) 假设  $n=k$  时成立, 即

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

成立. 当  $n=k+1$  时,

$$\begin{aligned} \text{左边} &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) \\ &= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3) \\ &= \text{右边} \end{aligned}$$

因此, 当  $n=k+1$  时等式也成立.

## 2.2 第二数学归纳法

设  $p(n)$  是一个含有正整数  $n$  的命题 ( $n \geq a, a \in \mathbb{N}^*$ ), 如果:

1) 当  $n=a$  时,  $p(a)$  成立;

2) 由  $p(m)$  对所有适合  $a \leq m \leq k$  的正整数  $m$  成立的假定下, 推得  $p(k+1)$  时命题也成立, 那么  $p(n)$  对所有正整数  $n \geq a$  都成立.

例 2 利用数学归纳法证明第  $n$  个质数  $p_n < 2^{2^n}$

证明: (1) 当  $n=1$  时,  $p_1 = 2 < 2^{2^1}$ , 命题成立.

(2) 设  $1 \leq n \leq k$  时命题成立, 即

$$p_1 < 2^{2^1}, p_2 < 2^{2^2}, \cdots, p_k < 2^{2^k},$$

即

$$p_1 p_2 \cdots p_k < 2^{2^1} 2^{2^2} \cdots 2^{2^k},$$

则

$$p_1 p_2 \cdots p_{k+1} \leq 2^{2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k} = 2^{2^{k+1} - 2} < 2^{2^{k+1}}.$$

所以  $p_1 p_2 \cdots p_{k+1}$  的质因子  $p < 2^{2^{k+1}}$ .

又  $p_1, p_2, \dots, p_k$  都不是  $p_1 p_2 \cdots p_{k+1}$  的质因子 (相除时余1), 故  $p > p_k$ . 即  $p \geq p_{k+1}$ .

因此,  $p_{k+1} \leq p < 2^{2^{k+1}}$ . 即  $n = k+1$  时命题也成立.

综上 (1)、(2) 可知对于任何自然数  $n$  命题都成立.

### 2.3 反向归纳法<sup>[1]</sup>

反向归纳法也叫倒推归纳法. 相应的两个步骤如下:

- (1) 对于无穷多个自然数, 命题成立.
- (2) 假设  $p(k+1)$  成立, 可导出  $p(k)$  也成立. 由 (1)、(2) 可以判定对于任意的自然数  $n, p(n)$  都成立.

**例3** 利用倒推归纳法证明  $G \leq A$ .

**证明:** (1) 首先证明, 当  $n = 2^m$  ( $m$  为自然数) 时, 不等式 (2) 成立. 对  $m$  施行归纳法.

当  $m=1$  时, 即  $n=2$  时,  $\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1 + a_2}{2}$  (已证).

当  $m=2$  时, 即  $n=4$  时

$$\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} = \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{a_3 a_4}} \leq \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} \leq \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}.$$

因此  $m=1, 2$  时, 不等式 (2) 都成立.

设当  $m=k$  时不等式 (2) 成立, 那么当  $n = k+1$  时

$$\begin{aligned} \sqrt[2^{k+1}]{a_1 a_2 \cdots a_{2^k} a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}}} &= \sqrt[2^k]{\sqrt[2^k]{a_1 \cdots a_{2^k}} \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}}}} \\ &\leq \frac{1}{2} \left( \sqrt[2^k]{a_1 \cdots a_{2^k}} + \sqrt[2^k]{a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}}} \right) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{a_1 + \cdots + a_{2^k}}{2^k} + \frac{a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^k} \right) \\ &= \frac{a_1 + \cdots + a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

由此可知, 对于  $n = 2^m$  形状的自然数, 不等式 (2) 是成立的. 即对无穷多个自然数 2, 4, 8, 16,  $\dots, 2^m, \dots$

不等式 (2) 是成立的.

(2) 下面再证倒推归纳法的第二步.

假设  $n = k + 1$  时, 不等式 (2) 成立. 只要导出  $n = k$  时不等式 (2) 也成立就可以了.  
为证

$$\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}, \quad \text{设 } b = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k},$$

即

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = kb.$$

由假设

$$\begin{aligned} \sqrt[k+1]{a_1 a_2 \cdots a_k b} &\leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k + b}{k+1} = \frac{kb + b}{k+1} = b \\ \therefore a_1 a_2 \cdots a_k b &\leq b^{k+1}, \quad \therefore a_1 a_2 \cdots a_k \leq b^k. \end{aligned}$$

即

$$\sqrt[k]{a_1 a_2 \cdots a_k} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}$$

由 (1)、(2), 对于任意的自然数  $n$ , 不等式 (2) 都成立.

#### 2.4 二重归纳法<sup>[2]</sup>

设  $p(n, m)$  是一个含有两个独立正整数  $n, m$  的命题, 如果

- (1)  $p(1, m)$  对任意正整数  $m$  成立,  $p(n, 1)$  对任意正整数  $n$  成立;
- (2) 在  $p(n+1, m)$  与  $p(n, m+1)$  成立的假设下, 可以证明  $p(n+1, m+1)$  成立. 那么

$p(n, m)$  对任意正整数  $n$  和  $m$  都成立.

**例4** 设  $n, m$  都是正整数, 则用数学归纳法证明不定方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$$

的非负整数解的个数为  $C_{n+m-1}^n$

**证明:** (1) 当  $n=1$  时, 不定方程  $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$  为  $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$  显然, 方程

$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$  的非负整数解为

$$(1, 0, \cdots, 0), (0, 1, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, 1)$$

共有  $m$  组, 而按  $C_{n+m-1}^n$  式计算, 方程  $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = 1$  的非负整数解的组数为  $C_m^1 = m$ ,

所以  $p(1, m)$  对任意正整数  $m$  都成立.

当  $m=1$  时, 不定方程

---

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n \text{ 为 } x_1 = n$$

显然，此方程只有一组解，而由  $C_{n+m-1}^n$  式可知，方程  $x_1 = n$  的非负整数解的组数为  $C_n^n = 1$ ，因此  $p(n,1)$  对任意正整数  $n$  成立.

(3) 假设结论对  $p(n+1,m)$  和  $p(n,m+1)$  成立, 即假设不定方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n+1$$

的非负整数解的组数为  $C_{n+m}^{n+1}$ ，不定方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} = n$$

的非负整数解的组数为  $C_{n+m}^n$ .

现在来考虑不定方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} = n+1$$

的非负整数解的组数，该方程的非负整数解可分为两类：

第一类 当  $x_{m+1} = 0$  时，方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} = n+1$$

变为

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n+1,$$

所以方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} = n+1$$

满足  $x_{m+1} = 0$  的非负整数解的组数为  $C_{n+m}^{n+1}$ .

第二类 当  $x_{m+1} > 0$  时，令  $x_{m+1} = x_{m+1} + 1 (x_{m+1} \geq 0)$ ，则方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} = n+1$$

变为

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} = n.$$

方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} = n+1$$

与方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} = n$$

实为同一方程，所以，方程  $x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} = n+1$  满足  $x_{m+1} > 0$  的非负整数解的组数为  $C_{n+m}^{n+1}$ .

因此，方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m + x_{m+1} = n+1$$

的非负整数解的组数为

$$C_{n+m}^{n+1} + C_{n+m}^n = C_{n+m+1}^{n+1} = C_{(n+1)+(m+1)-1}^{n+1}$$

这表明，命题  $p(n+1, m+1)$  成立. 于是，由二重归纳法知，对任意正整数  $n$  和  $m$ ，命题都成立.

## 2.5 螺旋式归纳法<sup>[1]</sup>

现有两个与自然数  $n$  有关的命题  $A(n)$ ， $B(n)$ . 如果满足

(1)  $A(1)$  是正确的.

(2) 假设  $A(k)$  成立，能导出  $B(k)$  成立，假设  $B(k)$  成立，能导出  $A(k+1)$  成立.

这样就能断定对于任意的自然数  $n$ ， $A(n)$  和  $B(n)$  都正确.

**例5** 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{2l} = 3l^2$ ， $a_{2l-1} = 3l(l-1)+1$  其中  $l$  是自然数，又令  $S_n$  表示数列  $\{a_n\}$

的前  $n$  项之和，求证：

$$S_{2l-1} = \frac{1}{2}l(4l^2 - 3l + 1) \quad (1)$$

$$S_{2l} = \frac{1}{2}l(4l^2 + 3l + 1) \quad (2)$$

**证明：** 这里可把等式 (1)：

$$S_{2l-1} = \frac{1}{2}l(4l^2 - 3l + 1)$$

看作命题  $A(l)$ ，把等式 (2)：

$$S_{2l} = \frac{1}{2}l(4l^2 + 3l + 1)$$

看作命题  $B(l)$  ( $l$  为自然数).

①  $l=1$  时， $S_1=1$ ，等式 (1) 成立.

② 假设  $l=k$  时，等式 (1) 成立. 即

$$S_{2k-1} = \frac{1}{2}k(4k^2 - 3k + 1)$$

那么

$$S_{2k} = S_{2k-1} + a_{2k} = \frac{1}{2}k(4k^2 - 3k + 1) + 3k^2 = \frac{1}{2}k(4k^2 + 3k + 1).$$

即等式 (2) 也成立. 这就是说, 若  $A(k)$  成立可导出  $B(k)$  成立.

又假设  $B(k)$  成立, 即

$$S_{2k} = \frac{1}{2}k(4k^2 + 3k + 1).$$

那么

$$\begin{aligned} S_{2k+1} &= S_{2k} + a_{k+1} = \frac{1}{2}k(4k^2 + 3k + 1) + [3(k+1)k + 1] \\ &= \frac{1}{2}[(24k^3 + 12k^2 + 12k + 4) - (3k^2 + 6k + 3) + (k+1)] \\ &= \frac{1}{2}[4(k+1)^3 - 3(k+1)^2 + (k+1)] \\ &= \frac{1}{2}(k+1)[4(k+1)^2 - 3(k+1) + 1]. \end{aligned}$$

这就是说, 若命题  $B(k)$  成立, 可以导出命题  $A(k+1)$  也成立. 由①、②可知, 对于任意的自然数  $l$  等式 (1)、(2) 都成立.

显然, 这种螺旋式归纳法也实用于多个命题的情形, 在原有的基础上再加入  $C(n)$  也是成立的.

## 2.6 跳跃归纳法<sup>[1]</sup>

若一个命题  $T$  对自然数  $1, 2, \dots, l$ , 都是正确的; 如果由假定命题  $T$  对自然数  $k$  正确, 就能推出命题  $T$  对自然数  $k+l$  正确. 则命题对一切自然数都正确.

证明: 因为任意自然数

$$n = lq + r \quad 0 \leq r < l$$

由于命题对一切  $0 < r < l$  中的  $r$  都正确, 所以命题对  $l, r+l, r+2l \dots r+kl \dots$  都正确, 因而对一切  $n$  命题都正确.

**例 6** 求证用面值 3 分和 5 分的邮票可支付任何  $n$  ( $n \geq 8$ ) 分邮资.

**证明:** 显然当  $n=8, n=9, n=10$  时, 可用 3 分和 5 分邮票构成上面邮资 ( $n=8$  时, 用一个 3 分邮票和一个 5 分邮票,  $n=9$  时, 用 3 个 3 分邮票,  $n=10$  时, 用 2 个 5 分邮票).

下面假定  $k=n$  时命题正确, 这时对于  $k=n+3$ , 命题也正确, 因为  $n$  分可用 3 分与 5 分

---

邮票构成，再加上一个3分邮票，就使 $n+3$ 分邮资可用3分与5分邮票构成。由跳跃归纳法知命题对一切 $n \geq 8$ 都成立。

## 2.7 关于实数的连续归纳法<sup>[3]</sup>

设 $p(x)$ 是关于实数 $x$ 的一个命题，如果：

(1) 有 $a$ ，当 $x < a$ 时， $p(x)$ 成立；

(2) 如果对所有小于 $y$ 的 $x$ ， $p(x)$ 成立，则由 $z > y$ ，使得对所有小于 $z$ 的 $x$ ， $p(x)$ 成立；

则对所有实数 $x$ ， $p(x)$ 成立。

**例7** 证明连续函数的介值定理：设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数， $f(a) < 0 < f(b)$ ，则有 $c \in (a,b)$ ，使得 $f(c) = 0$ 。

**证明：**不妨令 $f(x)$ 在 $(-\infty, a]$ 上恒为 $f(a)$ ，在 $[b, +\infty)$ 上恒为 $f(b)$ 。用反证法，设没有实数 $c$ ，使得 $f(c) = 0$ 。考虑命题 $p(x) : f(x) < 0$ 。则有：

(1) 显然，当 $x < a$ 时 $p(x)$ 成立；

(2) 如果对所有小于 $y$ 的 $x$ ， $p(x)$ 成立，即 $f(x) < 0$ ；由连续性可得 $f(y) \leq 0$ 。由反证法假设， $f(y)$ 不能为0，故 $f(y) < 0$ 。再由连续性，有 $d > 0$ ，使得 $f < 0$ 在 $(y-d, y+d)$ 上成立。故有 $z = y+d > y$ ，对所有小于 $z$ 的 $x$ ， $p(x)$ 成立。

由连续归纳法，对所有实数 $x$ ， $p(x)$ 成立： $f(x) < 0$ 。这与 $f(b) > 0$ 矛盾，说明反证法假设不成立。

下面，我们用连续归纳法证明柯西收敛准则。

**例8<sup>[5]</sup>** (Cauchy 收敛准则) 数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ ，存在一个正整数 $N$ ， $\forall n > N$ ， $\forall m > N$ ， $|a_n - a_m| < \varepsilon$ 。

**证明<sup>[6]</sup>：**必要性易证。现证充分性。

(a) 若 $\{a_n\}$ 有无穷多项相等，不妨设 $a_{n_1} = a_{n_2} = \cdots = a_{n_k} = \cdots = a$ ，则 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$ 。

事实上，由条件 $\forall \varepsilon > 0$ ，存在一个正整数 $N$ ， $\exists n_0 > N$ ，使得 $a_{n_0} = a$ ， $\forall n > N$ ，

---

$|a_n - a_{n_0}| = |a_n - a| < \varepsilon$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

(b) 若  $\{a_n\}$  没有无穷多项相等, 则  $\{a_n\}$  有无穷多个互异的项, 即集合  $\{a_n | n=1, 2, 3, \dots\}$  是无限集. 下面用反证法证明  $\{a_n\}$  收敛.

假设  $\{a_n\}$  不收敛, 仿照上面证明, 可知  $\exists M > 0, a_n \in [-M, M], n=1, 2, \dots$ , 对任意  $x \in [-M, M]$ ,  $x$  都不是  $\{a_n\}$  的极限, 因此存在  $\delta_x > 0$ , 使得  $(x - \delta_x, x + \delta_x)$  中最多含有  $\{a_n | n=1, 2, 3, \dots\}$  的有限项, 否则,  $\forall \varepsilon > 0, (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  中含有  $\{a_n\}$  的无限多项, 由已知条件, 对于  $\varepsilon > 0$ , 存在一个正整数  $N$ ,  $\forall n > N, \forall m > N, |a_n - a_m| < \varepsilon$ , 一定存在  $i > N$ , 且  $a_i \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ , 从而  $\forall n > N, |a_n - x| < |a_n - a_i| + |a_i - x| < 2\varepsilon$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ , 得出矛盾. 故  $\forall x \in [-M, M]$ , 存在  $\delta_x > 0$ , 使得  $(x - \delta_x, x + \delta_x)$  中最多含有  $\{a_n | n=1, 2, 3, \dots\}$  的有限项.

引入命题  $p_x$ : 在  $(-\infty, x]$  中最多含有  $\{a_n | n=1, 2, 3, \dots\}$  的有限项.

①取  $x_0 = -M$ , 对于任意  $-x < x_0$ , 显然有  $p_x$  真;

②如果有某个  $y$ , 使得对一切  $x < y$  有  $p_x$  真, 因为  $y$  不是  $\{a_n\}$  的极限, 故有开区间  $(y - \delta_y, y + \delta_y)$ , 使  $y \in (y - \delta_y, y + \delta_y)$ , 而  $(y - \delta_y, y + \delta_y)$  内只有  $\{a_n | n=1, 2, 3, \dots\}$  的有限个点,  $(y - \delta_y, y)$  内取  $x_1$ , 由归纳法假定,  $(-\infty, x_1]$  内只有  $\{a_n | n=1, 2, 3, \dots\}$  的有限个点,  $(y - \delta_y, y + \delta_y)$  内也只有  $\{a_n | n=1, 2, 3, \dots\}$  的有限个点, 于是  $(-\infty, y + \delta_y)$  内只有  $\{a_n | n=1, 2, 3, \dots\}$  的有限个点, 于是对一切  $x < y + \delta_y$ , 有  $p_x$  为真.

由连续性归纳法知, 对于一切  $x, (-\infty, x]$  内只有  $\{a_n | n=1, 2, 3, \dots\}$  的有限个点. 取  $x = M$ , 可推出  $\{a_n | n=1, 2, 3, \dots\}$  是有限集, 这与题设矛盾. 故  $\{a_n\}$  收敛. 命题得证.

## 结束语

经过这次的学习, 对数学归纳法有了更深入的了解. 数学归纳法不仅在自然数上广泛应用, 在实数上的应用也是相当广泛的, 甚至对许多数学定理的证明起到了很大的帮助. 有了这七种变式, 在今后的数学命题的证明过程中, 又会有更多的方法, 方便解题. 当然, 数学归纳法的内容是十分丰富的, 不仅仅是只有这七种形式, 如在今后学习过程中遇到, 再做详细了解.

---

## 参考文献

- [1] 蒋文蔚, 杨延龄. 数学归纳法[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1985. 5
- [2] 王志兰. 数学归纳法及其在数论方面的应用[J]. 青海师专学报, 2009. 5
- [3] 张景中, 冯勇. 有序集的一般归纳原理和连续归纳法[J]. 科技导报, 2008. 6
- [4] 肖海燕, 代钦. 数学归纳法在几何教学中的应用[J]. 内蒙古师范大学学报, 2011. 4
- [5] 华东师范大学数学系. 数学分析(第三版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009. 5
- [6] 徐永春, 关金玉, 李博, 梅瑞. 用连续归纳法证明实数系中的定理[J]. 河北北方学院数学系, 2007. 1